ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

MATHEMATIQUES III

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Option économique

Mercredi 15 mai 1991 de 8h à 12h

EXERCICE I: ANALYSE.

On se propose, dans cet exercice, de rechercher des valeurs approchées des racines de l'équation f(x) = 0, où f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1.$$

1°) Etude de la fonction f.

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet 3 racines distinctes a, b, c (a < b < c).

c) Déterminer un encadrement du type [n/10, (n+1)/10], où $n \in \mathbb{Z}$, pour chacune de ces trois racines a, b, c, puis représenter graphiquement la fonction f.

2°) Etude d'une suite convergeant vers c.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$, et:

$$(R) \qquad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n.$$

a) Etablir que, pour tout entier naturel n : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le u_{n+2}$, et que, pour tout entier $n \ge 2$: $u_n > 0$.

b) Vérifier que les suites géométriques (a^n), (b^n), (c^n) satisfont la relation (R).

c) Exprimer en fonction de a, b, c trois nombres réels x, y, z tels que:

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 = 0. \\ ax + by + cz = u_1 = 0. \\ a^2x + b^2y + c^2z = u_2 = 1. \end{cases}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = xa^n + yb^n + zc^n$.

d) On pose pour $n \ge 2$: $p_n = u_{n+1}/u_n$. Prouver que la suite (p_n) converge vers c.

Exprimer $p_n - c$ en fonction du quotient $(b^n - a^n)/(b - a)$ et de u_n pour $n \ge 2$.

En déduire que $p_n - c$ est équivalent à $K(b/c)^n$ lorsque n tend vers l'infini, où K est un nombre réel que l'on explicitera en fonction de a, b, c.

3°) Algorithme de calcul de c.

a) Rédiger en PASCAL un algorithme permettant de calculer d'une part la valeur de u_n, d'autre part celle de p_n, tant que la condition $f(p_n - 10^{-6}).f(p_n + 10^{-6}) < 0$ n'est pas réalisée.

b) En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de c (on précisera la valeur de l'entier n pour laquelle p_n convient).

4°) Etude d'une suite convergeant vers a.

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 0$, $v_2 = 1$, et:

$$(R') \qquad v_{n+3} = 3v_{n+2} + 6v_{n+1} + v_n.$$

a) Etablir que, pour tout entier naturel n : $v_n \ge 0$, puis que, pour tout entier $n \ge 2$: $v_n > 0$.

b) Vérifier que les suites géométriques $(-1/a)^n$, $(-1/b)^n$, $(-1/c)^n$ satisfont la relation (R').

Tournez la page S.V.P.

c) Exprimer en fonction de a, b, c trois nombres réels x', y', z' tels que:

$$\begin{cases} x' + y' + z' = v_0 = 0. \\ \dfrac{x'}{a} + \dfrac{y'}{b} + \dfrac{z'}{c} = v_1 = 0. \\ \dfrac{x'}{a^2} + \dfrac{y'}{b^2} + \dfrac{z'}{c^2} = v_2 = 1. \end{cases}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a:

$$v_n = \frac{x'}{(-a)^n} + \frac{y'}{(-b)^n} + \frac{z'}{(-c)^n}.$$

d) On pose pour $n \geq 1$: $q_n = v_n/v_{n+1}$. Prouver que la suite (q_n) converge vers -a.
Déterminer un équivalent de $q_n + a$ lorsque n tend vers l'infini.

5°) Algorithme de calcul de a.

a) Rédiger en PASCAL un algorithme permettant de calculer d'une part la valeur de v_n, d'autre part celle de q_n, tant que la condition $f(-q_n - 10^{-6}).f(-q_n + 10^{-6}) < 0$ n'est pas réalisée.

b) En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de a (on précisera la valeur de l'entier n pour laquelle $-q_n$ convient).

c) Etablir enfin que a + b + c = 6 et en déduire une valeur approchée de b.

EXERCICE II: ALGEBRE.

On désigne par n un entier naturel non nul, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels non nuls, et par α le plus petit des n réels $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.

On considère alors les trois matrices carrées d'ordre n définies par:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi donc, M = A - D.

1°) Majoration de α lorsque A n'est pas inversible.

Dans toute cette question, on suppose que la matrice A n'est pas inversible.

a) Prouver qu'il existe n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls tels que:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Démontrer que, pour $1 \leq i \leq n$, on a:

$$\alpha |x_i| \leq |x_1| + \ldots + |x_{i-1}| + |x_{i+1}| + \ldots + |x_n| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_j|.$$

c) En déduire, par sommation de ces inégalités, que l'on a: $\alpha \leq n-1$.

A SUIVRE

2°) Etude d'une suite de matrices-colonnes.

Dans toute cette question, on suppose que $\alpha > n-1$, donc que A est inversible.

Etant donnés n nombres réels $b_1, b_2, \dots, b_n$, il existe donc n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, uniques, tels que l'on ait:

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \textit{que l'on note} \quad AX = B.$$

a) Etablir que: $X = -D^{-1}MX + D^{-1}B$.

Etant donnée une matrice-colonne à n lignes notée U_o, on définit une suite de matrices-colonnes par la relation: $U_{k+1} = -D^{-1}MU_k + D^{-1}B$ ($k \in \mathbb{N}$), et l'on pose:

$$U_k = \begin{bmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{bmatrix}.$$

b) Etablir que: $U_{k+1} - X = -D^{-1}M(U_k - X)$. En déduire que l'on a:

$$\sup_{1 \le j \le n} |x_{k+1,j} - x_j| \le \frac{n-1}{\alpha} \sup_{1 \le j \le n} |x_{k,j} - x_j|.$$

c) En déduire que, pour $1 \le j \le n$, la suite $(x_{k,j})$ tend vers x_j lorsque k tend vers l'infini.

3°) Etude d'un premier exemple (avec $\alpha > n-1$).

On considère le système d'équations AX = B et la matrice-colonne U_o suivants:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad U_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer x_1, x_2, x_3.

b) Déterminer les trois premières matrices-colonnes U_1, U_2, U_3 de la suite (U_k) définie au 2°. Comparer U_3 à la solution exacte X du système AX = B.

4°) Etude d'un second exemple (avec $\alpha \le n-1$).

On considère le système d'équations AX = B et la matrice-colonne U_o suivants:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad U_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer x_1, x_2, x_3.

b) Déterminer les trois premières matrices-colonnes U_1, U_2, U_3 de la suite (U_k) définie au 2°, puis, de façon générale, déterminer U_k. Que se passe-t-il?

******

FIN